

**Determinazione delle caratteristiche  
dinamiche delle strutture mediante misure  
di rumore ambientale come strumento di  
valutazione delle condizioni strutturali e  
Structural Health Monitoring**

*Giovanni Bongiovanni*

## ANALISI DINAMICA SPERIMENTALE

*Insieme di processi relativi a prove su una struttura, aventi come obiettivo quello di ottenere una descrizione matematica del loro comportamento dinamico*

**Analisi del comportamento dinamico:** rilievo delle vibrazioni ambientali e/o forzate: vengono disposti, sulla base del comportamento previsto, sensori velocimetrici e/o accelerometrici sulla struttura e si effettuano più serie di misure sia in presenza di solo rumore ambientale che sotto l'azione di forzanti prodotte tramite vibrodine o altri mezzi.

**Analisi dei dati sperimentali:** i dati registrati vengono analizzati sia nel dominio dei tempi (analisi statistiche ricavando i valori di picco e quelli efficaci) che nel dominio delle frequenze (per ricavare le caratteristiche dinamiche della struttura, ossia frequenze proprie, forme modali e smorzamenti).

**Identificazione strutturale:** sulla base dei dati sperimentali si definisce un modello della struttura da utilizzare per studiare la risposta strutturale all'azione di un terremoto reale e di normativa. Ove possibile e, in particolare qualora siano disponibili informazioni affidabili sulla geometria e sui materiali, è preferibile definire un modello ad elementi finiti, che viene successivamente tarato in base ai dati sperimentali.

## PROVE DINAMICHE E MONITORAGGIO

**Prove dinamiche** = Installazione di una strumentazione temporanea per rilievi di vibrazioni ambientali e/o forzate per periodi limitati

**Monitoraggio** = Installazione di una strumentazione fissa per periodi di tempo lunghi o per l'intera vita dell'opera

- ◆ Sorveglianza in continuo con registrazione completa
- ◆ Sorveglianza in continuo con registrazione parziale (funzionamento a soglia)

**Interventi di consolidamento o adeguamento sismico:** è opportuno effettuare l'analisi del comportamento dinamico anche a lavori ultimati, per verificare l'efficacia dell'intervento stesso.

## USO DELL'ANALISI DINAMICA SPERIMENTALE

Strutture soggette ad azioni dinamiche nel corso della propria vita: sisma, vento, traffico veicolare e ferroviario, esplosioni.

L'utilizzo dell'analisi dinamica sperimentale non si esaurisce al campo delle strutture antisismiche o soggette, in fase di esercizio, alle azioni del vento o alle vibrazioni indotte dal traffico. Infatti:

- **opere di nuova realizzazione:** consente di verificare le ipotesi assunte in sede di progetto (rigidezze strutturali, caratteristiche dei materiali, efficacia dei collegamenti, ...);
- **strutture esistenti:** consente di stimarne lo stato di salute, individuando la presenza e il livello di un eventuale danneggiamento e ricavando utili informazioni per la definizione del relativo intervento di consolidamento.

Pertanto, l'analisi sperimentale dinamica trova applicazione anche alle strutture non soggette a carichi dinamici rilevanti, presentandosi come un efficace strumento di diagnosi.

## CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALE

Un fenomeno dinamico è usualmente descritto attraverso la misura di una grandezza (spostamento, velocità o accelerazione) in funzione della variabile tempo.

Una siffatta funzione prende il nome di **time history**.

Lo studio di tali funzioni costituisce l'**analisi dei segnali** (dinamici).

Distinguiamo:

- **segnali deterministici**, che possono essere previsti con accuratezza sulla base della conoscenza del fenomeno o di precedenti risultati sperimentali;
- **segnali random**, non prevedibili.

## SEGNALI RANDOM

Un segnale random può essere:

- **Stazionario**, se i parametri che lo descrivono sono costanti nel tempo;
- **Non stazionario**, se i parametri che lo descrivono sono dipendenti dal tempo.

In realtà la singola time history rappresenta soltanto una singola realizzazione di ciò che può accadere.

L'insieme di tutte le possibili time histories definisce un **processo random**.

## SEGNALI RANDOM STAZIONARI

Assegnato l'insieme delle possibili realizzazioni, si definiscono:

Valore medio al tempo  $t_1$

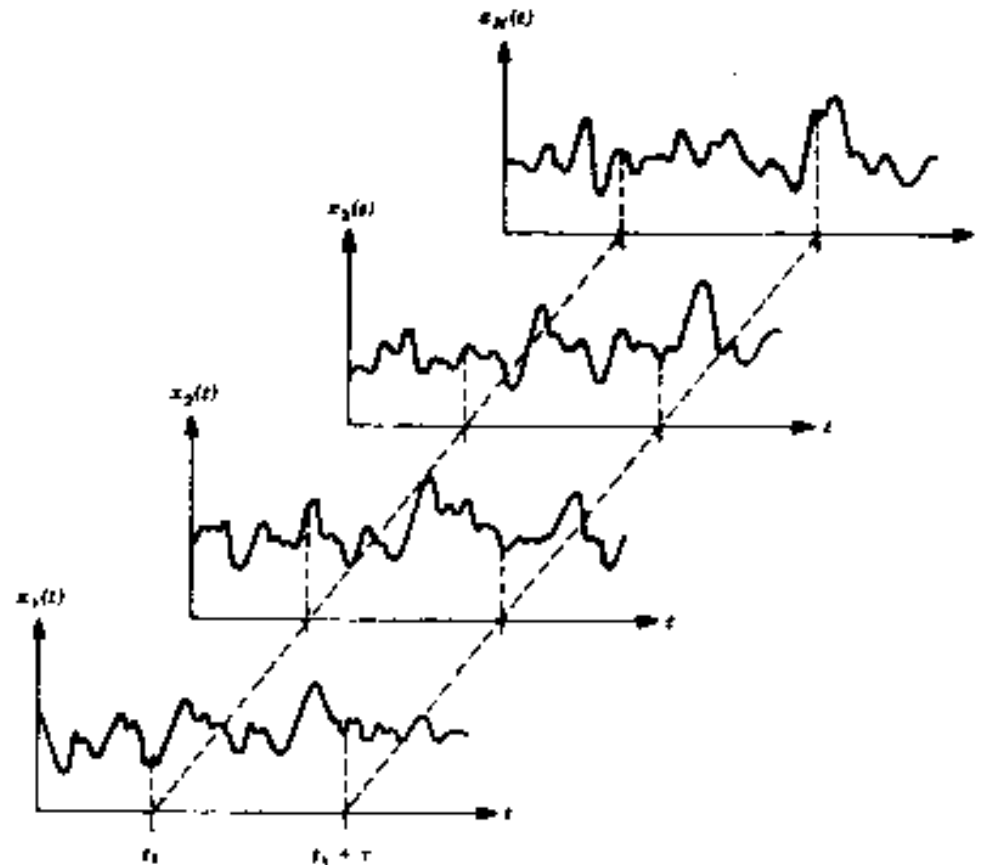
$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1)$$

Valore quadratico medio al tempo  $t_1$

$$\psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2(t_1)$$

Autocorrelazione al tempo  $t_1$

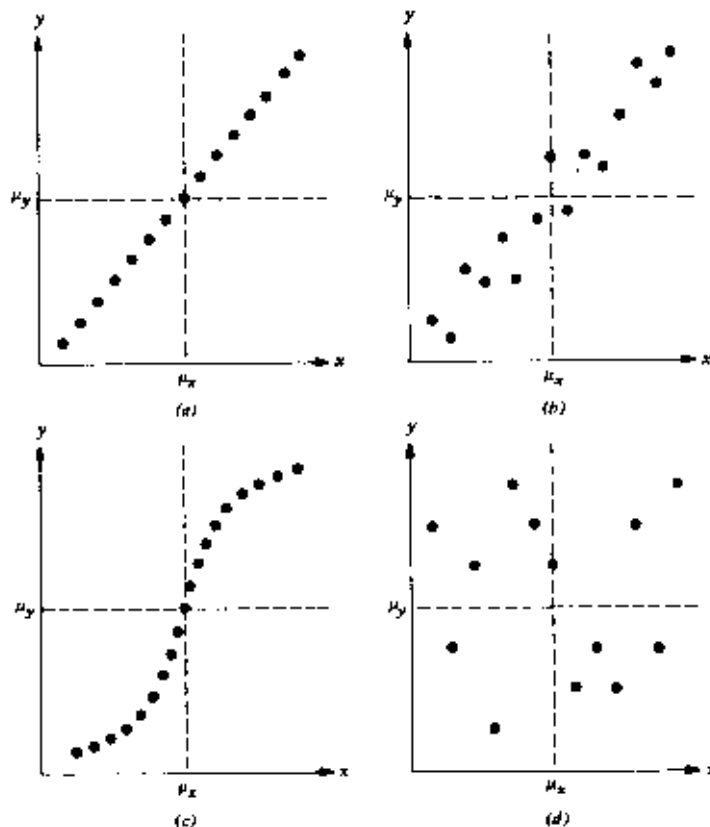
$$R_{xx}(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \cdot x_i(t_1 + \tau)$$



Se tali grandezze sono indipendenti da  $t_1$ , il processo random è stazionario.

## CORRELAZIONE

Si supponga di applicare su una struttura un carico di intensità  $x_i$  ( $i=1,N$ ) e di misurare il corrispondente valore di uno spostamento  $y_i$  ( $i=1,N$ ). In figura sono rappresentati alcuni possibili diagrammi della funzione  $y(x)$ :



**a)** Tra  $x$  e  $y$  esiste una relazione perfettamente lineare ( $\rho_{xy}=1$ );

**b)** Tra  $x$  e  $y$  esiste una relazione pressoché lineare, anche se a causa di elementi di casualità e/o di rumore i valori appaiono leggermente dispersi ( $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ );

**c)** Tra  $x$  e  $y$  esiste una relazione non lineare ( $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ );

**d)** Tra  $x$  e  $y$  non esiste alcuna relazione ( $\rho_{xy}=0$ )



## COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Una misura del grado di dipendenza lineare tra  $x$  e  $y$  è fornita dal **coefficiente di correlazione**

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

dove  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  sono le **deviazioni standard**:

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2$$

**varianza di x**

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2$$

**varianza di y**

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y)$$

**covarianza di x e y**

## FUNZIONE DI CROSS E AUTO-CORRELAZIONE

Ricordando la covarianza di x e y:

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y)$$

si definisce **funzione di covarianza**

$$C_{xy}(\tau) = E[(x(t) - \mu_x) \cdot (y(t + \tau) - \mu_y)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x) \cdot (y(t + \tau) - \mu_y) dt = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y$$

e **funzione di cross-correlazione**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt$$

Analogamente si definisce **funzione di auto-covarianza**:

$$C_{xx}(\tau) = E[(x(t) - \mu_x) \cdot (x(t + \tau) - \mu_x)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x) \cdot (x(t + \tau) - \mu_x) dt = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

e **funzione di auto-correlazione**:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt$$

## CROSS-SPETTRO E AUTO-SPETTRO

Si definisce **funzione di densità cross-spettrale o cross-spettro**:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

Si definisce **funzione di densità auto-spettrale o auto-spettro** (o, a volte, anche densità spettrale di potenza),

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f) \qquad S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f)$$

Dalle precedenti definizioni si passa alle funzioni definite soltanto per  $f \geq 0$ :

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \qquad G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

mentre per  $f < 0$  si assume

$$G_{xx}(f) = G_{xy}(f) = 0$$

## FUNZIONE DI COERENZA

Vale la disequazione:

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_{xx}(f) \cdot G_{yy}(f)$$

Il rapporto:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) \cdot G_{yy}(f)} \quad 0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$$

è detta **funzione di coerenza** dei segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ .

## FASE DEL CROSS-SPETTRO

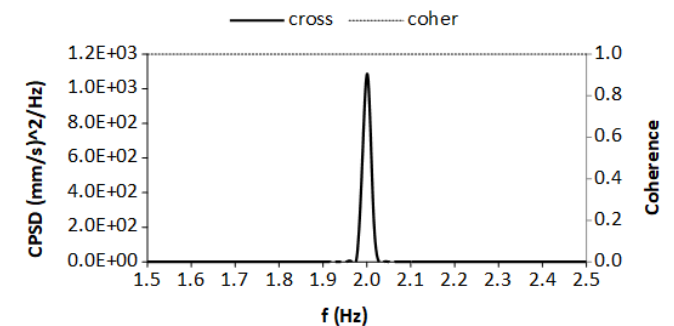
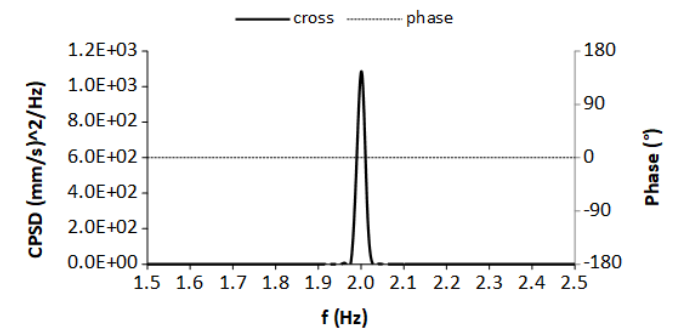
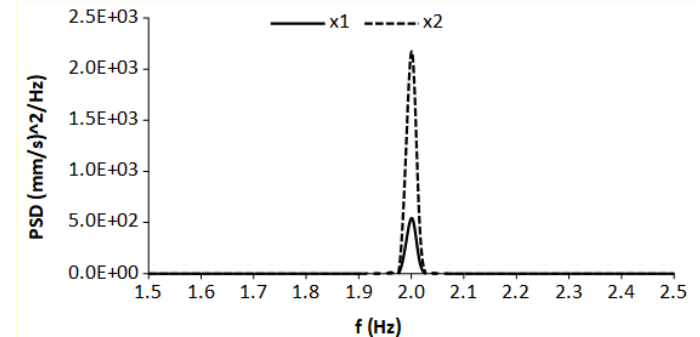
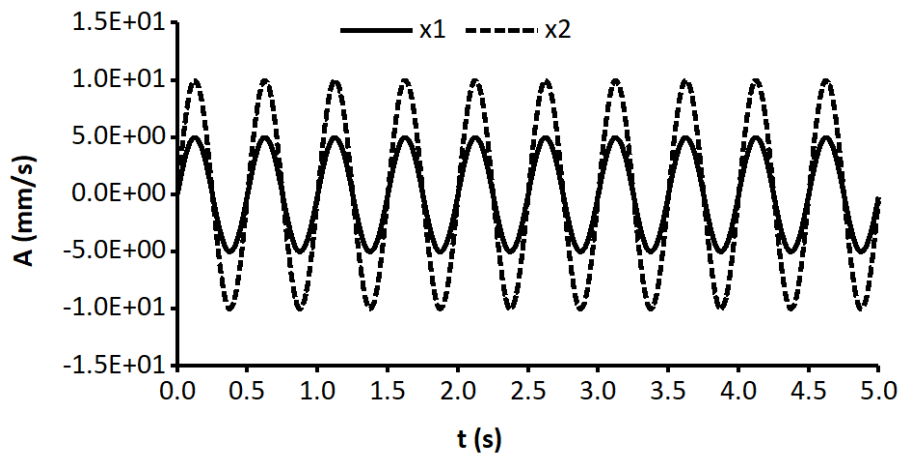
Con riferimento al fatto che la trasformata di Fourier è una funzione complessa, scrivendola come somma di parte reale, **cospettro**, e parte immaginaria, **quadspettro**, si ha che il cospettro individua la parte dei due segnali in fase e il quadspettro la parte dei due segnali in opposizione.

L'angolo tra cospettro e quadspettro prende il nome di **fase del cross-spettro** ed è caratterizzato dai valori notevoli  $0^\circ$  e  $\pm 180^\circ$ . Alle frequenze per cui la fase è  $0^\circ$  i due segnali sono in fase mentre alle frequenze per cui la fase è  $\pm 180^\circ$  i due segnali sono in opposizione di fase.

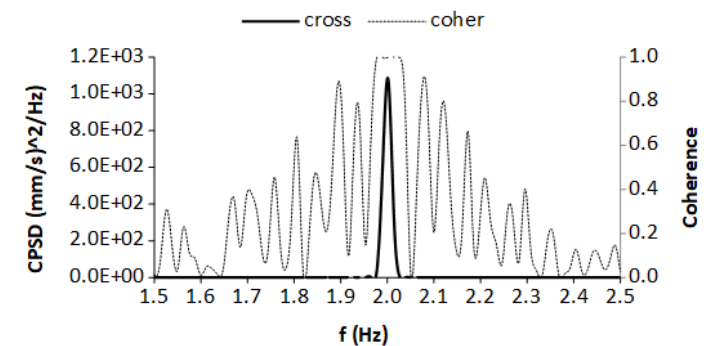
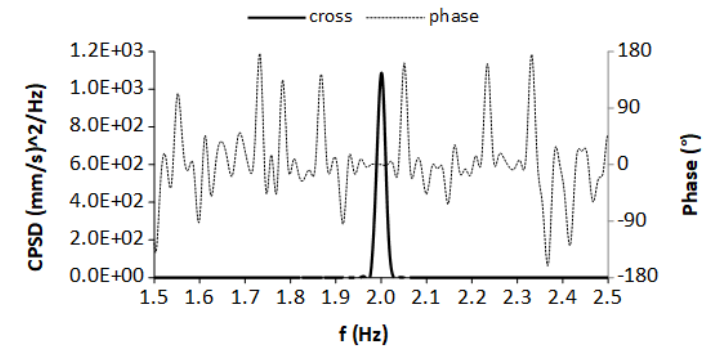
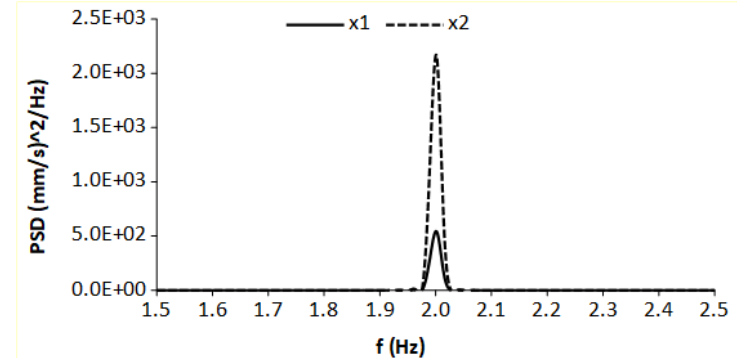
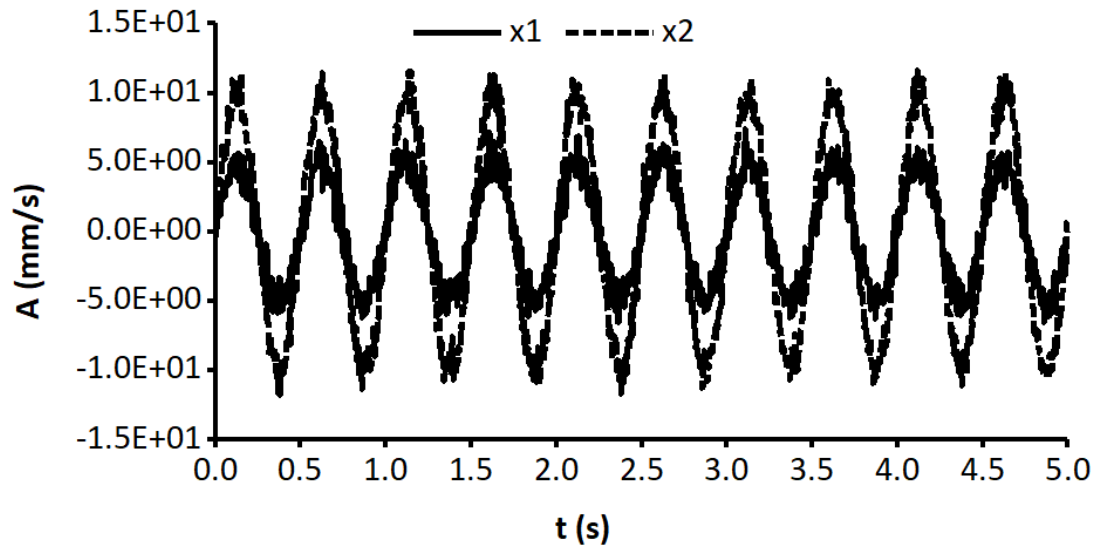
## TERMINOLOGIA CORRENTE

Autospettro	==>	Power Spectral Density PSD ( $xx^2/\text{Hz}$ )
Crossspettro	==>	Cross Power Spectral Density CPSD ( $xx^2/\text{Hz}$ )
Coerenza	==>	Coherence, adimensionale
Fase	==>	Phase, °

## SINUSOIDI IN FASE



## SINUSOIDI IN FASE CON RUMORE GAUSSIANO





## FORME MODALI

La forma del i-esimo modo di vibrazione è fornita approssimativamente dai valori ai punti di misura

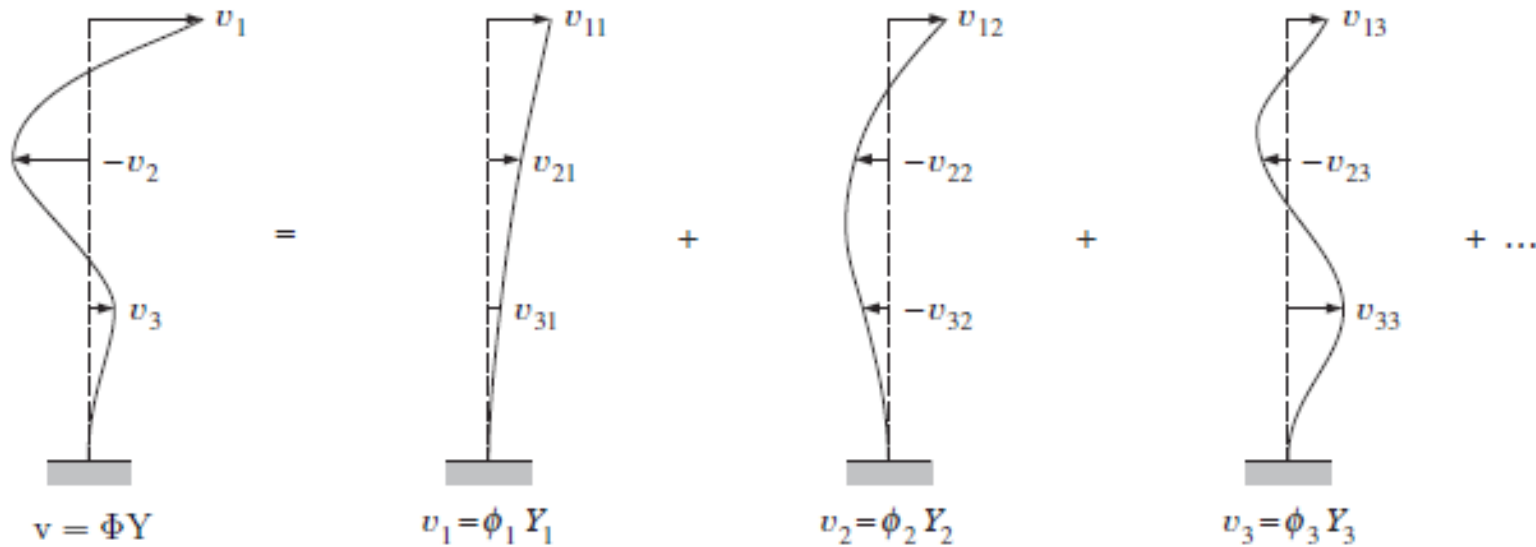
$$\phi_i(y_j) = \sqrt{G_{y_j y_j}(f_i)} \quad i = 1, 2, 3 \dots j = 1, 2, \dots, r$$

A rigore, per identificare compiutamente un modo di vibrazione occorrerebbero  $r = i$  punti di misura. Ovviamente, è bene avere a disposizione un numero maggiore di punti di misura.

Nel caso, invece, in cui la sperimentazione serve soltanto a conferma di dati analitici, ottenuti sulla base di un'accurata modellazione, può essere sufficiente anche un numero inferiore di strumenti.

La precedente formula vale soltanto per smorzamenti  $\zeta < 0.05$ .

## FORME MODALI DI UNA MENSOLA



## SMORZAMENTO

Una stima dello smorzamento viscoso equivalente può ottenersi dagli auto-spettri o, preferibilmente, dai cross-spettri, meno contaminati dal rumore tramite l'half power bandwidth method.

$$\zeta_i = B_i / (2f_i)$$

A tal fine devono essere soddisfatte le seguenti ipotesi:

- a) spettro dell'input uniforme intorno alla frequenza in esame
- b) smorzamento basso
- c) risoluzione in frequenza sufficientemente accurata
- d) modi sufficientemente distanziati in frequenza tra di loro.

## SMORZAMENTO

